

# 高聚物黏弹性力学模型计算中容易被忽视的基本问题(Ⅱ) ——有关 Voigt-Kelvin 模型和四元件模型的计算

朱平平,何平笙,杨海洋

(中国科学技术大学高分子科学与工程系,合肥 230026)

**摘要:**以高分子物理教学中的几道典型习题及解析为例,阐述了在应用黏弹性力学模型模拟高聚物力学松弛现象时,不能忽视的一些基本问题。

**关键词:**高聚物;力学模型;黏弹性;力学松弛

显著的黏弹性,即同时具有显著的黏性和弹性是高聚物力学性能的一大特点<sup>[1~3]</sup>,当高聚物受到外部作用时,其力学性质随时间的变化往往介于理想弹性体与理想黏性体之间,这种典型的力学松弛行为可以表现为不同的力学松弛现象,如蠕变、应力松弛、滞后和力学损耗等。

作者在高分子物理教学中,时常发现学生在运用力学模型模拟高聚物黏弹性时,往往会忽略一些基本问题。如在运用 Maxwell 模型模拟高聚物应力松弛现象时<sup>[4,5]</sup>,容易忽视的问题是:应力不是恒定值,即在外力作用时,黏壶慢慢被拉开,其应变随时间逐渐发展,为了维持总应变不变,弹簧则要慢慢回缩,弹簧的应变减小,因此弹簧的应力(也就是总应力)是在逐渐衰减直至为 0,可表示为  $\sigma(t) = \sigma(0)e^{-\frac{t}{\tau}}$ 。

下面则是一道有关 Voigt-Kelvin 力学模型计算的习题,学生也是容易出错的。题目是这样的:假设有一 Voigt-Kelvin 模型,其中弹簧的模量为  $1.0 \times 10^8 \text{ Pa}$ ,黏壶中液体的黏度为  $1.0 \times 10^{10} \text{ Pa} \cdot \text{s}$ 。对模型施加  $1.0 \times 10^8 \text{ Pa}$  的应力,试计算:

- (1)施加作用力瞬间弹簧产生的应变、承受的应力;
- (2)维持到 100s 时弹簧产生的应变、承受的应力;
- (3)模型达到最大形变时弹簧承受的应力。

如图 1 所示,Voigt-Kelvin 模型是由一个理想弹簧(用下标 1 表示)和一个理想黏壶(用下标 2 表示)并联而成的,两个元件上的应变总是相等的,即  $\epsilon = \epsilon_1 = \epsilon_2$ ,而作用在模型上的应力  $\sigma$  由两个元件共同承受,  $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$ 。当拉力作用在模型上时,由于黏壶的存在,弹簧不能立即被拉开,而是随着时间延长与黏壶一起慢慢被拉开,模型的应变是逐渐发展的,但是应变又不是无限增大,而是最终趋于一平衡值,因此 Voigt-Kelvin 模型对模拟高聚物的蠕变现象特别有用。

有些学生是这样解答的:

Voigt-Kelvin 模型的运动方程式为

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 = E\epsilon + \eta \frac{d\epsilon}{dt} \quad (1)$$

改写为

$$\sigma = E\epsilon + \eta \frac{\epsilon}{t}$$

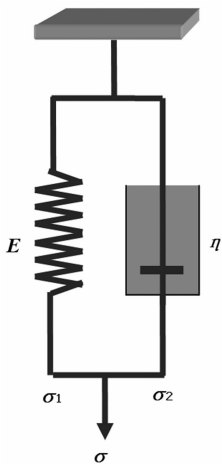


图 1 Voigt-Kelvin 模型

Figure 1 Voigt-Kelvin model

收稿:2013-04-26;修回:2013-05-27;

基金项目:中国科学技术大学高分子物理及实验相关课程教学团队建设项目;

作者简介:朱平平(1964—),女,中国科学技术大学高分子科学与工程系教授,主要从事高分子溶液、高分子凝聚态结构、共混高聚物性能等方面的研究,近年来同时开展了高分子物理及实验的教学研究工作,E-mail:zhupp@ustc.edu.cn.

因此

$$\epsilon = \frac{\sigma}{E + \frac{\eta}{t}}$$

代入已知数据,计算出三种情况下弹簧所承受的应力。

这种解答忽视了一个基本问题,即在恒定应力  $\sigma_0$  作用下,模型的应变随时间是逐渐增加的,但有别于单一的理想黏壶,并不是线性增加的,因此  $\frac{d\epsilon}{dt} \neq \frac{\epsilon}{t}$ ,上述解答是错误的。正确的解答如下。

由式(1)得

$$\frac{d\epsilon}{\sigma_0 - E\epsilon} = \frac{dt}{\eta} \quad (2)$$

当  $t = 0$  时,由于黏壶的存在,弹簧不能立即被拉开,因此  $\epsilon = 0$ 。式(2)积分得

$$\epsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E}(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) = \epsilon(\infty)(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \quad (3)$$

式中,  $\tau = \frac{\eta}{E}$ , 为松弛时间,其数值由弹性系数和黏性系数共同决定。而当  $t \rightarrow \infty$  时,  $\epsilon = \epsilon(\infty)$ ,  $\epsilon(\infty)$  为模型所能达到的最大应变值,又称为平衡应变值,这是由于虽然黏壶的形变可以不断增加,但是弹簧的存在决定了模型最大应变值由弹簧的模量所决定,即  $\epsilon(\infty) = \frac{\sigma_0}{E}$ 。

根据已知数据,计算如下:

$$\tau = \frac{\eta}{E} = \frac{1.0 \times 10^{10}}{1.0 \times 10^8} = 100(\text{s})$$

(1)施加作用力瞬间弹簧产生的应变、承受的应力

当  $t = 0$  时,由于黏壶的应变不能瞬间产生,弹簧也就不能立即被拉开,模型没有形变。因此

$$\begin{aligned} \epsilon_1 &= \epsilon = 0 \\ \sigma_1 &= 0, \sigma_2 = \sigma_0 \end{aligned}$$

此时黏壶承受全部的应力作用,弹簧不受力。

(2)维持到 100s 时弹簧产生的应变、承受的应力

随着时间延长,黏壶慢慢被拉开,弹簧也随着黏壶慢慢被拉开,当  $t = 100 \text{ s}$  时,

$$\begin{aligned} \epsilon_1 &= \epsilon = \frac{\sigma_0}{E}(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) = \frac{1.0 \times 10^8}{1.0 \times 10^8}(1 - e^{-\frac{100}{100}}) = 0.632 \\ \sigma_1 &= E\epsilon_1 = 1.0 \times 10^8 \times 0.632 = 6.32 \times 10^7 (\text{Pa}) \end{aligned}$$

可见,随着时间延长,模型应变量逐渐增加,弹簧承受的应力也在逐渐增加,而黏壶承受的应力在逐渐减小,应力在两个元件上的分配情况不断在变化,但是始终满足  $\sigma_1 + \sigma_2 = \sigma_0$ 。

(3)当  $t \rightarrow \infty$  时,模型达到的最大应变为

$$\begin{aligned} \epsilon(\infty) &= \frac{\sigma_0}{E} = \frac{1.0 \times 10^8}{1.0 \times 10^8} = 1 \\ \sigma_1 &= E\epsilon(\infty) = 1.0 \times 10^8 \times 1 = 1.0 \times 10^8 (\text{Pa}) = \sigma_0, \sigma_2 = 0 \end{aligned}$$

此时弹簧承受全部的应力作用,而黏壶不受力。

计算结果表明,在恒定应力作用下,应变随时间逐渐发展,最终趋于一平衡值,这一过程与交联高聚物的蠕变现象相符。当 Voigt-Kelvin 模型瞬间受力作用时,形变不能产生,表现出完全黏性;当作用时间很长时,形变充分发展,且最大应变值由弹簧的模量所决定,模型表现出完全弹性;只有当作用时间适中时,黏弹性才会充分呈现出来,即弹簧产生部分形变,黏壶也产生形变。

然而,Voigt-Kelvin 模型并不能模拟线形高聚物蠕变过程中的永久变形,对于线形高聚物,根据高分子的分子运动机理,选用四元件模型来模拟更为合适。以如下习题为例。

如图 2 所示,用一四元件模型模拟某一线形高聚物的蠕变行为,该模型的四个参数为:  $E_1 = 5.0 \times$

$10^8 \text{ Pa}$ ,  $E_2 = 1.0 \times 10^8 \text{ Pa}$ ,  $\eta_2 = 1.0 \times 10^8 \text{ Pa} \cdot \text{s}$ ,  $\eta_3 = 5.0 \times 10^{10} \text{ Pa} \cdot \text{s}$ 。蠕变试验开始时,应力维持在  $\sigma_0 = 1.0 \times 10^8 \text{ Pa}$ ,求外力作用 10s 后该高聚物的应变  $\epsilon$ ? 此时,除去外力,高聚物的应变  $\epsilon'$ ? 再过 10s 后,该高聚物的应变  $\epsilon''$ ?

(注:弹簧  $E_2$  与黏壶  $\eta_2$  并联组合成 Kelvin 模型,Kelvin 模型再与弹簧  $E_1$  和黏壶  $\eta_3$  串联组合成四元件模型。)

注意,在应用四元件模型模拟高聚物力学松弛现象时,可以把模型看成为三个部分组成,即弹簧、Voigt-Kelvin 模型和黏壶,它们是串联在一起的,所受应力均为  $\sigma_0$ 。其中弹簧  $E_1$  模拟高聚物瞬间产生的普弹形变,弹簧  $E_2$  与黏壶  $\eta_2$  并联组合的 Voigt-Kelvin 模型模拟随时间而变化的高弹形变,黏壶  $\eta_3$  则是模拟随时间线性发展的永久形变量。

$$\text{依题意, } \tau_2 = \frac{\eta_2}{E_2} = \frac{1.0 \times 10^8}{1.0 \times 10^8} = 1 \text{ (s)}$$

(1)应力作用在四元件模型时,弹簧  $E_1$  瞬间产生应变,  $\epsilon_1 = \frac{\sigma_0}{E_1}$ ; 对于 Voigt-Kelvin 模型,应变随时间逐渐增加,  $\epsilon_2 = \frac{\sigma_0}{E_2}(1 - e^{-t/\tau_2})$ ; 而

黏壶  $\eta_3$  的应变随时间线性增加,  $\epsilon_3 = \frac{\sigma_0}{\eta_3}t$ 。

则,  $\sigma_0$  作用 10 秒(  $t_1$  )产生的应变  $\epsilon$  为:

$$\epsilon = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3$$

$$\epsilon = \frac{\sigma_0}{E_1} + \frac{\sigma_0}{E_2}(1 - e^{-t_1/\tau_2}) + \frac{\sigma_0}{\eta_3}t_1$$

代入已知条件,得

$$\epsilon = \frac{1.0 \times 10^8}{5.0 \times 10^8} + \frac{1.0 \times 10^8}{1.0 \times 10^8}(1 - e^{-\frac{10}{1}}) + \frac{1.0 \times 10^8}{5.0 \times 10^{10}} \times 10 \approx 1.22$$

(2)除去  $\sigma_0$  后,弹簧  $E_1$  产生的应变  $\epsilon_1$  立即完全回复,Voigt-Kelvin 模型产生的应变瞬间不能回复,而黏壶  $\eta_3$  的应变永久不能回复。

即,除去  $\sigma_0$ ,高聚物的应变  $\epsilon'$  为:

$$\epsilon' = \frac{1.0 \times 10^8}{1.0 \times 10^8}(1 - e^{-\frac{10}{1}}) + \frac{1.0 \times 10^8}{5.0 \times 10^{10}} \times 10 \approx 1.02$$

(3)Voigt-Kelvin 模型产生的应变瞬间不能回复,但随时间延长逐渐回复。因此,除去  $\sigma_0$  10s 后,高聚物的应变  $\epsilon''$  为:

$$\epsilon'' = \frac{1.0 \times 10^8}{1.0 \times 10^8}(1 - e^{-\frac{10}{1}})e^{-\frac{10}{1}} + \frac{1.0 \times 10^8}{5.0 \times 10^{10}} \times 10 \approx 0.02$$

这些都是典型的有关高聚物黏弹性的力学模型模拟习题,解答时需特别留意已知条件,如应用力学模型模拟高聚物力学松弛现象时,是在维持总应变不变的前提下还是在总应力恒定的条件下。多多练习,对学生认识高聚物黏弹性现象、掌握其主要特征无疑是非常有帮助的。

## 参考文献:

- [1] 何平笙. 新编高聚物的结构与性能. 北京: 科学出版社, 2009, 213~308.
- [2] 何平笙. 高聚物的力学性能, 第 2 版. 合肥: 中国科学技术大学出版社, 2008, 59~87.
- [3] 何曼君, 陈维孝, 董西侠. 高分子物理, 修订版. 上海: 复旦大学出版社, 1990, 295~370.
- [4] 朱平平, 何平笙, 杨海洋. 高分子材料科学与工程, 2007, 23(3): 251~253.
- [5] 朱平平, 何平笙, 杨海洋. 高分子物理重点难点释疑. 合肥: 中国科学技术大学出版社, 2011.

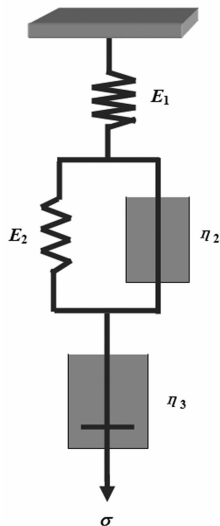


图 2 四元件模型  
Figure 2 Four-element model

Some Essential Issues Not to be Ignored in Applying the Viscoelastic  
Mechanical Models of Polymers( Ⅱ )  
——In Applying Voigt-Kelvin Model and Four-element Model to Simulate  
the Mechanical Relaxation Phenomena

ZHU Ping-ping, HE Ping-sheng, YANG Hai-yang  
(*Department of Polymer Science and Engineering, University of Science and Technology of  
China, Hefei 230026, China*)

**Abstract:**Based on several typical exercises and analysis in the teaching of “Polymer Physics” as examples, it was illustrated in this paper that some essential issues are not to be ignored in applying the viscoelastic mechanical models to simulate the mechanical relaxation phenomena of polymers.

**Key words:**Polymer; Mechanical model; Viscoelasticity; Mechanic relaxation phenomena